Билет 12

Выражения для частичных сумм тригонометрического ряда Фурье и чезаровских сумм тригонометрического ряда Фурье

$f \in L_R^2[-\pi,\pi]$, периодическая с периодом 2π

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx + b_k \sin kx\right) \text{ — частичные суммы ТРФ}$$

$$\sigma_n(f,x) = \frac{S_0(f,x)+...+S_{n-1}(f,x)}{n} \text{ — чезаровские суммы ТРФ}$$

$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt\cdot \cos kx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt \cdot \sin kx\right) =$
$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx)\right]dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt =$
$\{u = t-x$, подынтегральная функция периодична$\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku\right]du;$

$\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku\right] = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\left[\sin\frac{u}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} 2\sin\frac{u}{2}\cos ku\right] = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\left[sin\frac{u}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\sin{(k+\frac{1}{2})u} - \sin{(k-\frac{1}{2})u}\right] =$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin{(n+\frac{1}{2})u}}{2\sin\frac{u}{2}} & u\neq 0 \quad \text{далее будем подразумевать именно эту функцию,} \\ n+\frac{1}{2} & u=0 \quad \text{т.к. она — дробь сверху, доопределенная по непрерывности} \end{cases},$$

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})u}}{2\sin\frac{u}{2}} f(u+x)du \quad (*)$$

$D_n(u) = \dfrac{\sin{(n+\frac{1}{2})u}}{2\sin\frac{u}{2}}$ - ядро Дирихле.

Для $f\equiv 1$: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dt = 2$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt = b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin ntdt = 0 \Rightarrow S_n(f,x) = 1, \forall n\in\mathbb{N}$

Подставим в $(*)$: $1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin{(n+\frac{1}{2})u}}{2\sin\frac{u}{2}}du \quad (\widehat{*})$

$\sigma_n(f,x) = \frac{S_0(f,x)+...+S_{n-1}(f,x)}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_k(u)f(u+x)du\right] = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin{(k+\frac{1}{2})u}}{2\sin\frac{u}{2}}f(u+x)du$

$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin{(k+\frac{1}{2})u} = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}2\sin{(k+\frac{1}{2})u}\sin\frac{u}{2} = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\cos ku - cos(k+1)u\right) =$
$= \dfrac{1-\cos un}{2\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{2\sin^2\frac{un}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{\sin^2\frac{un}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}f(u+x)du \quad (**)$$

Обозначим $\Phi_n(u) = \dfrac{\sin^2\frac{nu}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}$ - ядро Фейера, тоже доопределено при u=0 по непрерывности

Для $f\equiv 1$: $\sigma_n(f,x)\equiv 1$. Подставим в $(**)$: $\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)du = 1 \quad (\widehat{**})$

Теорема 4 (Фейера). *Пусть* $f(x)\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. *Тогда* $\sigma_n(f,x) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$

Док-во: Продолжим функцию f с периодом 2π на всю прямую $\mathbb{R}$.
Т.к. $f\in C(\mathbb{R})$ и периодична, то f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$,
т.е. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0\colon \forall u\in[-\delta,\delta], \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \left|f(x+u)-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$
Кроме того, $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$: $\exists M>0\colon |f(x)|\le M\,\forall x\in\mathbb{R}$
$\sigma_n(f,x) - f(x) = (\widehat{**}) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)f(u+x)du - f(x)\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)du =$
$= \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)\big(f(u+x)-f(x)\big)du = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\delta}^{\delta}(\dots)du + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta\le|u|\le\pi}(\dots)du$

- $\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\delta}^{\delta}|f(x+u)-f(x)|\Phi_n(u)du\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(u)du \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)du = \frac{\varepsilon}{2}$
- $\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta\le|u|\le\pi}(\dots)du\right| \le \frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta\le|u|\le\pi}2M\,|\Phi_n(u)|du \le \frac{2M}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}du \le \frac{\varepsilon}{2}$ при n$\geqslant N_0(\varepsilon)$

$\forall\varepsilon \quad \exists N_0(\varepsilon): |\sigma_n(f,x)-f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon\,\forall x\in[-\pi,\pi] \Rightarrow \sigma_n(f,x) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$ $\square$

Билет 13

Определение. ***Тригонометрическим многочленом*** *назовем функцию вида:*
$T_n(x) = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cos kx + d_k \sin kx$

Например, $S_n(f,x), \sigma_n(f,x)$ - тригонометрические многочлены

Теорема 5 (первая теорема Вейерштрасса). *Пусть* $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$.

Тогда f *можно на* $[-\pi,\pi]$ *равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, т.е.* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T(x)$ *- тригонометрический многочлен:* $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$

Док-во: По т. Фейера $\sigma_n(f,x) \underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$, где $\sigma_n(f,x)$ - триг. многочлен. □

Теорема 6 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть* $f \in C[a,b]$.

Тогда f *можно на [a,b] равномерно приблизить многочленом (обычным), т.е.* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(x)$ *- многочлен:* $\max\limits_{x\in[a,b]} |P(x) - f(x)| < \varepsilon$

Док-во:

I. Докажем для частного случая : $[a,b] = [-\pi,\pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$.
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, T_n(x) = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cos kx + d_k \sin kx : \max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$.
T(x) - линейная комбинация $\sin kx$, $\cos kx$, $0 \le k \le n$, каждая из этих функций представима степенным рядом с радиусом сходимости $R = \infty$
$\Rightarrow T(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, R = \infty$
На $[-\pi,\pi]$ степенной ряд сходится равномерно по теореме Абеля
$\Rightarrow \exists N : |T(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k| < \varepsilon/2, x \in [-\pi,\pi]$, обозначим $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$
$\Rightarrow |f(x) - P(x)| \le |f(x) - T(x)| + |T(x) - P(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$

II. Теперь случай : $[a,b] = [-\pi,\pi]$, но условий на значения нет
Подберем $g(x)$ вида: $g(x) = f(x) - \alpha x$, с условием $g(-\pi) = g(\pi)$,
т.е. $f(-\pi) + \alpha\pi = f(\pi) - \alpha\pi \Rightarrow \alpha = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q(x)$ - многочлен: $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x) - Q(x)| < \varepsilon$ (из I шага)
$|g(x) - Q(x)| = |f(x) - \alpha x - Q(x)| = |f(x) - P(x)|$,
$P(x) = \alpha x + Q(x)$ - многочлен , $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$, ч.т.д.

III. Обобщим для произвольного отрезка $[a,b]$ при помощи линейной замены: $x = \alpha t + \beta$, переводящей $x \in [a,b]$ в отрезок $t \in [-\pi,\pi]$
$\begin{cases} -\pi\alpha + \beta = a \\ \pi\alpha + \beta = b \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{a+b}{2}, \; \alpha = \frac{b-a}{2\pi} \ne 0, \; t = \frac{x-\beta}{\alpha}$
$f(x) \in C[a,b]$. Пусть $F(t) = f(\alpha t + \beta)$. Тогда $F(t) \in C[-\pi,\pi]$
$\Rightarrow \exists \, Q(t)$ - многочлен: $\max\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |F(t) - Q(t)| < \varepsilon$ (по шагу II)
$\Rightarrow \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - Q(\frac{x-\beta}{\alpha})| < \varepsilon \Rightarrow P(x) = Q(\frac{x-\beta}{\alpha})$ - искомый многочлен

Замкнутость тригонометрической системы

Теорема 7. *Тригонометрическая система* $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots\}$ *замкнута в* $L^2_R[-\pi,\pi]$

Док-во:
Нужно показать, что $\forall\, f \in L^2_R[-\pi,\pi]\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists T(x) -$ триг. многочлен $: \|f - T(x)\| < \varepsilon$

1. $\exists g_1 \in \hat{C}[-\pi,\pi] : ||f - g_1|| < \varepsilon/3$
   f интегрируема по Риману $\Rightarrow$
   а) f ограничена на $[-\pi,\pi]$, т.е. $\exists M > 0 : |f(x)| \le M\ \forall x \in [-\pi,\pi]$
   б) $\exists\tau$ - разбиение $[-\pi,\pi] : -\pi = x_0 < \dots < x_l = \pi : \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - s_\tau(f) < \frac{\varepsilon^2}{18M}$
   $$s_\tau(f) = \sum_{k=1}^{l} m_k \Delta x_k,\ m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$$
   $$g_1(x) = \begin{cases} m_k, & x \in (x_{k-1},x_k), 1 \le k \le l \\ \frac{m_k+m_{k+1}}{2}, & x = x_k,\ k = 1,\cdots,l-1 \\ \frac{m_1+m_n}{2}, & x = \pm\pi \end{cases} \quad \Rightarrow |g_1(x)| \le M, \text{ т.к. } |m_k| \le M$$
   $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_1(x)dx = s_\tau(f)$$
   Таким образом, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - s_\tau(f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g_1(x))dx =$
   $= \{f(x) - g_1(x) \ge 0$ кроме конечного числа точек$\} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_1(x)|dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$
   $$||f - g_1|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g_1(x))^2 dx} \le \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_1(x)|\,(|f(x)| + |g_1(x)|)\,dx} \le$$
   $$\le \sqrt{2M \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_1(x)|dx} \le \sqrt{2M\frac{\varepsilon^2}{18M}} = \varepsilon/3$$
2. . Строим $g_2 \in C[-\pi,\pi]$, $g_2(-\pi) = g_2(\pi)$, $||g_2 - g_1|| < \varepsilon/3$.
   В $g_2(x)$ δ-окрестности точек разрыва $g_1(x)$ заменяем линейными функциями
   $g_2(x) = g_1(x)$ вне $[-\pi,-\pi+\delta] \cup [x_1-\delta,x_1+\delta] \cup \dots \cup [\pi-\delta,\pi]$
   $g_2(x)$ линейна на каждом сегменте, причем $g_2(x) \in C[-\pi,\pi]$,
   $g_2(-\pi) = g_2(\pi)$, $|g_2(x)| \le M$, $x \in [-\pi,\pi] \Rightarrow |g_1(x) - g_2(x)| \le 2M$
   $||g_1 - g_2|| = \sqrt{\int\limits_{[-\pi,-\pi+\delta]\cup[x_1-\delta,x_1+\delta]\cup\dots\cup[\pi-\delta,\pi]} (g_1(x) - g_2(x))^2 dx} \le \sqrt{(2M)^2 2\delta l} < \varepsilon/3$ для достаточно малых δ
3. Покажем, что $\exists T(x) : ||g_2 - T|| < \varepsilon/3$
   Для $g_2(x)$ (о чудо!) выполнены условия первой теоремы Вейерштрасса
   $\Rightarrow \exists T(x)$: тригонометрический многочлен: $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |g_2(x) - T(x)| \le \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$
   $$||g_2(x) - T(x)|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (g_2(x) - T(x))^2 dx} \le \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9\cdot 2\pi}dx} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{9}\frac{1}{2\pi}2\pi} = \varepsilon/3 \Rightarrow$$

$||f(x) - T(x)|| \le ||f - g_1|| + ||g_1 - g_2|| + ||g_2 - T|| \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$
$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists T(x)\ -$ тригонометрический многочлен $: ||f(x) - T(x)|| < \varepsilon$ $\square$

Билет 14

Теорема 8 (Локальная теорема Фейера).
Пусть f интегрируема на $[-\pi,\pi]$, период $f=2\pi$; в точке x_0 $\exists\, f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$.
Тогда $\sigma_n(f,x_0) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$

Док-во: $\sigma_n(f,x_0)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\Phi_n(t)\,dt$. В силу четности ядра Фейера и $(\hat{**})$:

$\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}\Phi_n(t)dt=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+0)\,\Phi_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0-0)\,\Phi_n(t)\,dt$

Таким образом, $\sigma_n(f,x)-\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]=$

$$=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\Phi_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}\left[f(x_0+t)-f(x_0-0)\right]\Phi_n(t)\,dt=I_1^n+I_2^n$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_1^n=0$ (аналогично $\lim\limits_{n\to\infty} I_2^n=0$)

- $\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta(\varepsilon)>0$ (можно считать $\delta<\pi$) : $|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\varepsilon \quad \forall t\in[0,\delta)$
- f ограничена на R (т.к. интегрируема по Риману и периодична)
  $\Rightarrow \exists M>0: |f(x)|\le M \quad \forall x\in R$

$$I_1^n=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\delta}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\Phi_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

- $\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\delta}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\Phi_n(t)\,dt\right|<\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\delta}\varepsilon\,\Phi_n(t)\,dt<\varepsilon\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt=\frac{\varepsilon}{2}\,\forall n\in\mathbb{N}$

- $|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\le 2M \quad \sin^2\frac{nt}{2}\le 1,\ \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\le\frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}$
  $\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt\right|\le\frac{2M}{2\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}dt\le\frac{\pi M}{\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}}=\frac{C}{n}\le\frac{\varepsilon}{2}$ при $n\ge N_0(\varepsilon)$

$\Rightarrow |I_1^n|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ при $n\ge N_0(\varepsilon)\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_1^n=0$

Следствие: Пусть $f\in L_R^2[-\pi,\pi]$, периодична с периодом 2π,
$\exists\, f(x_0\pm 0)$, ТРФ функции f(x) сходится в точке x_0: $\exists\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0)$
тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0)=\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$

Док-во: $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(f,x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0)$ (регулярный метод Чезаро), причем по локальной теореме Фейера этот предел равен $\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$ $\square$

Билет 15

Простейшие условия равномерной сходимости и почленной дифференцируемости тригонометрического ряда Фурье

Определение. *$f(x)$ имеет на $[a,b]$* ***кусочно-непрерывную производную****, если $\exists a = x_0 < \cdots < x_l = b$, f дифференцируема на $[a,b]\setminus \bigcup\limits_{j=0}^{l} \{x_j\}$, $\exists f'(x_{j-1}+0)$, $f'(x_j-0)$, $f' \in C(x_{j-1},x_j)$ при $j = 1,..,l$* [6]

Пример: $f(x) = |x|$ на $[-\pi,\pi]$ имеет кусочно-непрерывную производную

Теорема 9. *Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$,*
$f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на отрезке $[-\pi,\pi]$
$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \rightsquigarrow f(x)$ *ТРФ функции $f(x)$*
$\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)) \rightsquigarrow f'(x)$ *ТРФ функции $f'(x)$,* ***доопределенной*** *произвольным образом в точках разрыва*
Тогда

1. *ТРФ функции $f'(x)$ получен почленным дифференцированием ТРФ $f(x)$,*
   т.е. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = -kb_k$, $\beta_k = ka_k$, $k \in \mathbb{N}$,
   иными словами, $\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)] = \left(\frac{a_0}{2}\right)' + \sum\limits_{k=1}^{\infty} [a_k \cos'(kx) + b_k \sin'(kx)]$ [7]

2. *ТРФ функции $f(x)$ сходится на $[-\pi,\pi]$ абсолютно и равномерно к $f(x)$*

Док-во:

1. $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \sum\limits_{j=1}^{l} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x) \cos kx dx = \{\text{интегрирование по частям}\} =$
   $= \frac{1}{\pi} \sum\limits_{j=1}^{l} \left[f(x) \cos kx \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) k \sin kx dx \right] = \frac{1}{\pi} [\text{f}(\pi)\text{cos}\pi\text{k-f}(-\pi)cos(-\pi\text{k})\,] +$
   $+ \frac{k}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0 + kb_k \Rightarrow \alpha_k = kb_k$. Аналогично $\beta_k = -k\alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$

2. Достаточно показать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$.
   Тогда ТРФ f(x) сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi,\pi]$ по пр. Вейерштрасса;
   (а ряд самой функции будет сходиться к ней самой: периодически продолжаем $f(x)$ на $\mathbb{R}$ и пользуемся следствием локальной теоремы Фейера $\Rightarrow$ ТРФ функции f(x) сходится к f(x)).

   $|a_k| + |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} \leq \frac{1}{2}(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}) + \frac{1}{2}(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}) = \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} + \frac{1}{k^2}$
   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ сходится в силу равенства Парсеваля, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится
   $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$ сходится

Билет 16

Интегральный модуль непрерывности и его свойства

Определение. *Интегральный модуль непрерывности f на [a,b]:*

$\hat{\omega}_{[a,b]}(f,\delta) \overset{def}{=} \sup\limits_{|h|\le\delta} \int\limits_a^b |f(t+h)-f(t)|dt, \ \delta>0,$

f должна быть интегрируема по Риману на [a,b] и её период равен b-a

Из определения очевидно, что $\hat{\omega}_{[a,b]}(f,\delta)$ неотрицательная и неубывающая по δ
Введем обозначение : $\hat{\omega}(f,\delta)=\hat{\omega}_{[-\pi,\pi]}(f,\delta)$

Теорема 11. $\lim\limits_{\delta\to 0+0}\hat{\omega}(f,\delta)=0$

Док-во: f д.б. интегрируема по Риману на $[-\pi,\pi]$ и 2π-периодична, $f\in L^2_R[-\pi,\pi]$
Из замкнутости $L^2_R[-\pi,\pi]$: $\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists T(x)$ - триг. многочлен: $||f-T||\le\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$[9],

- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|*1\ dt = (|f(t)-T(t)|,1) \le$ {неравенство Коши – Буняковского} $\le \Big\||f-T|\Big\|\,||1|| = \Big\|f-T\Big\|\,||1|| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}1^2dt}=\frac{\varepsilon}{3}$
- $|f(t)-f(t+h)|\le|f(t)-T(t)|+|T(t)-T(t+h)|+|T(t+h)-f(t+h)| \quad\Rightarrow$
  $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(t+h)|dt\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|dt+\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T(t)-T(t+h)|dt+\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T(t+h)-f(t+h)|dt$
- Заметим, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t+h)-T(t+h)|dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|dt\le\frac{\varepsilon}{3}$
  в силу леммы об интегрируемости по периоду
- T имеет период 2π и непрерывна на R $\Rightarrow$ T равномерно непрерывна на R
  $\exists\delta>0:\forall h\in[-\delta,\delta] \quad \forall t\in R \quad |T(t+h)-T(t)|\le\frac{\varepsilon}{6\pi}\Rightarrow \int\limits^{\pi}|T(t+h)-T(t)|dt\le\frac{\varepsilon}{3}$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(t+h)|dt\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\le\varepsilon\Rightarrow\hat{\omega}(f,\delta)\le\varepsilon \ \Rightarrow \ \lim\limits_{\delta\to0+0}\hat{\omega}(f,\delta)=0$

Теорема 12. *Пусть f,g* $\in L^2_R[-\pi,\pi]$ *и периоды f и g равны* 2π.
Рассмотрим $F_x(t)=f(x+t)g(t) \qquad x\in R$

Тогда $\hat{\omega}(F_x,\delta)$ *равномерно по* $x\in R$ *сходится к 0 при* $\delta\to0+0$,
т.е. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_0>0:\forall\delta\in(0,\delta_0) \quad \forall x\in R \quad \hat{\omega}(F_x,\delta)<\varepsilon$

Док-во: f,g ограничены на R $\Rightarrow\exists M\ge0:|f(t)|\le M,|g(t)|\le M \quad \forall t\in R$
$|F_x(t+h)-F_x(t)|=|f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t)|\le$
$\le\Big|g(t+h)\,[f(x+t+h)-f(x+t)]\Big|+\Big|f(x+t)\,[g(t+h)-g(t)]\Big|\le$
$\le M\Big|f(x+t+h)-f(x+t)\Big|+M\Big|g(t+h)-g(t)\Big| \quad (**),$
$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)-f(x+t)|dt=\{\tau=x+t\}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(\tau+h)-f(\tau)|d\tau$
Интегрируем (**) на $[-\pi,\pi]$, взяв $|h|\le\delta$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F_x(t+h)-F_x(t)|dt &\le M\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(\tau+h)-f(\tau)|d\tau+M\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\tau+h)-g(\tau)|d\tau\\ |\hat{\omega}(F_x,\delta)| &\le M(\hat{\omega}(f,\delta)+\hat{\omega}(g,\delta))\to0\,(\text{по предыдущей теореме})\end{aligned}$$

выражение справа не зависит от x - значит, стремление равно(душное)мерное

Теорема 13. *Пусть* $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$, a_n, b_n *- коэффициенты Фурье функции* f

Тогда $\sqrt{a_n^2+b_n^2} \leq \frac{1}{2\pi}\hat{\omega}(f,\frac{\pi}{n})$

Док-во: $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = \{y = x - \tfrac{\pi}{n}\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f(y+\tfrac{\pi}{n})e^{iny+i\pi}\,dy =$$

$$= \{e^{iny+i\pi} = -e^{iny}\} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y+\tfrac{\pi}{n})e^{iny}\,dy$$

$$2(a_n+ib_n) = \frac{1}{\pi}[\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(t+\tfrac{\pi}{n}))e^{int}dt] \Rightarrow$$

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2} = |a_n+ib_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[|f(t)-f(t+\tfrac{\pi}{n})| * 1\right]dt \leq \frac{\hat{\omega}(f,\frac{\pi}{n})}{2\pi}$$ □

Следствие: Пусть f, g, F_x удовлетворяют условиям теоремы 12,
$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_x(t)\cos nt\,dt,\ b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_x(t)\sin nt\,dt$ - коэффициенты Фурье F_x.
Тогда $a_n(x) \rightrightarrows 0,\ b_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$

Док-во: $\sqrt{a_n^2(x)+b_n^2(x)} \leq \frac{1}{2\pi}\hat{\omega}(F_x,\frac{\pi}{n}) \rightrightarrows 0;\quad a_n(x), b_n(x) \leq \sqrt{a_n^2(x)+b_n^2(x)}$ □

Следствие: Пусть f - 2π-периодична, f,g $\in L^2_R[-\pi,\pi]$.
Тогда $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos nt\,dt,\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin nt\,dt \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$.

Док-во: Меняем, если нужно, функцию g(x) в точке $-\pi$, чтобы $g(-\pi) = g(\pi)$, и периодически продолжаем. На значения интегралов это не повлияет.
Применяем предыдущее следствие. □

Лемма. *Пусть* f *-* 2π*-периодична,* $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$, $\delta \in (0,\pi)$.

Тогда $C_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$

Док-во: $C_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} f(x+t)\dfrac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} f(x+t)\frac{\sin nt\cdot\cos\frac{t}{2}+\cos nt\cdot\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g_1(t)\cdot\sin nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g_2(t)\cdot\cos nt\,dt \overset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0+0$ согласно предыдущему следствию, где обозначили $g_1(t) = \begin{cases}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} & \delta\leq|t|\leq\pi\\ 0 & |t|<\delta\end{cases}$ $\quad g_2(t) = \begin{cases}1 & \delta\leq|t|\leq\pi\\ 0 & |t|<\delta\end{cases}$ □

Уточненные условия равномерной сходимости ТРФ

$\omega_{[a,b]}(f,\delta) = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2\in[a,b]\\|x_1-x_2|<\delta}} |f(x_1)-f(x_2)|$ - модуль непрерывности f(x) на [a,b]

Определение. *f принадлежит на $[a,b]$ к **классу Гельдера** порядка $\alpha(\alpha\in(0,1])$, (обозначется $f\in C^{\alpha}[a,b]$), если $\omega_{[a,b]}(f,\delta) = \underline{O}(\delta^{\alpha})$.*

При $\alpha = 1$ означает липшицевость функции на $[a,b]$

Замечание: $f\in C^{\alpha}[a,b] \Rightarrow f\in C[a,b]$
Замечание: Если f дифференцируема на [a,b] и $f'(x)$ ограничена на [a,b], то $\alpha = 1$

Док-во: $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1-x_2)| \le M(x_1-x_2)\le M\delta$, если $|x_1-x_2|\le\delta$

Теорема 15. *Пусть $f\in C^{\alpha}[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$.*

Тогда ТРФ f(x) равномерно сходится к f(x) на $[-\pi,\pi]$

Док-во: Периодически продолжаем функцию f на $\mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = f(x)$.
По условию : $\exists c_1 : \omega_{[-\pi,\pi]}(f,\delta)\le c_1\delta^{\alpha}$, докажем : $\omega_{[-2\pi,2\pi]}(f,\delta)\le 2c_1\delta^{\alpha}$
$x_1,\ x_2\in[-2\pi,2\pi];\ |x_1-x_2|<\delta$

- Если $x_1,x_2\in[-\pi,\pi]\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<c_1\delta^{\alpha}$
- Если $x_1,x_2\in[\pi,2\pi]\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| = |f(x_1-2\pi)-f(x_2-2\pi)|<c_1\delta^{\alpha}$
- Если $x_1,x_2\in[-2\pi,-\pi]\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| = |f(x_1+2\pi)-f(x_2+2\pi)|<c_1\delta^{\alpha}$
- точка π- между x_1,x_2 :
  $|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f(\pi)|+|f(\pi)-f(x_2)|\le c_1|x_1-\pi|^{\alpha}+c_1|\pi-x_2|^{\alpha}\le 2c_1\delta^{\alpha}$
- аналогично : точка $-\pi$- между x_1,x_2

$$S_n(f,x)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}f(x)\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} D_n(t)dt =$$

$$I_n^1(x) + I_n^2(x) - I_n^3(x),\ x\in[-\pi,\pi]$$

1. $|I_n^1(x)|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}2c_1|t|^{\alpha}\frac{\pi}{2|t|}dt = 2c_1\frac{|\delta|^{\alpha}}{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}\quad\forall n,\forall x\in[-\pi,\pi]$[11]

   при $\delta(\varepsilon)\in(0,\pi)$: $\frac{2c_1\delta^{\alpha}}{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}$
2. По лемме перед принципом локализации $I_n^2 \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$
3. По ней же $\int\limits_{\delta<|t|<\pi} D_n(t)dt \to 0$, $|f(x)|\le M$, т.к. f периодическая и интегрируемая

   $\Rightarrow |I_n^3|\le M|\int\limits_{\delta<|t|<\pi} D_n(t)dt|\to 0,\ I_n^3(x)\overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$

   $\Rightarrow \exists N(\varepsilon,\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon) : |I_n^2(x)-I_n^3(x)|\le\frac{2\varepsilon}{3}\quad\forall x\in R,\ \forall n\ge N(\varepsilon)$

Окончательно $\forall n\ge N(\varepsilon),\ \forall x\in[-\pi,\pi]\quad |f(x)-S_n(f,x)|<\varepsilon$ $\square$

Билет 17

Определение. *Функция f называется* ***кусочно-гельдеровой*** *на* $[-\pi, \pi]$, *если* $\exists\ -\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$, *в точках* x_j $\exists f(x_{j-1}+0)$, $f(x_j-0)$, $1 \le j \le n$

$$\text{а функции } f_j(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (x_{j-1}, x_j) \\ f(x_{j-1}+0) & x = x_{j-1} \\ f(x_j - 0) & x = x_j \end{cases}$$

удовлетворяют: $f_j \in C^{\alpha_j}[x_{j-1}, x_j]$, $\alpha_j \in (0,1]$, $1 \le j \le n$

Замечание: Положим $f(\pi) = f(-\pi)$ (меняя функцию f в одной точке). Это не изменит ряда Фурье. Продолжим f(x) периодически на $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x \in (x_{j-1}, x_j) & f \text{ удовлетворяет условию Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_j \\ x = x_j \ (1 \le j \le n-1) & \text{усл. Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_{j+1} \text{ справа, } \alpha_j \text{ слева} \\ x = \pm\pi & \text{усл. Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_1 \text{ справа, } \alpha_n \text{ слева} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ТРФ сходится в т. x_j к $\frac{1}{2}[f(x_j-0) + f(x_j+0)]$, $1 \le j \le n-1$,
в точках $x = \pm\pi$ к $\frac{1}{2}[f(\pi-0) + f(-\pi+0)]$, в остальных точках x к f(x)

Теорема 16. *f - кусочно-гельдерова, в обозначениях в определении:* $[a,b] \subset (x_{j-1}, x_j)$.
Тогда ТРФ функции f(x) сходится равномерно к функции f(x) на [a,b]

Док-во: $\exists \delta > 0 \quad [a,b] \subset (x_j + 2\delta, x_j - 2\delta)$

$$\text{введем } g(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in [x_{j-1}+\delta, x_j - \delta] \\ \text{линейна на } [-\pi,\ x_{j-1}+\delta], [x_j - \delta,\ \pi] \\ g(-\pi) = g(\pi) = 0 \end{cases}$$

ТРФ функции g(x) сходится равномерно к g(x) по теореме 15
и применим к функциям $f_1 = g$, $f_2 = f$, следствие уточненной леммы Римана ☐

Определение. *f принадлежит* ***классу Дини-Липшица*** *на [a,b], если* $\omega_{[a,b]}(f, \delta) = \overline{o}(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}})$

Теорема 17 (Дини-Липшица). *Без доказательства*
Пусть f принадлежит на $[-\pi, \pi]$ классу Дини-Липшица,
тогда ТРФ функции f(x) сходится равномерно к f(x) на $[-\pi, \pi]$.

Замечание: $\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{\sqrt{l}}, \frac{\sin\frac{\pi}{l}x}{\sqrt{l}}, \dots, \frac{\cos\frac{\pi n}{l}x}{\sqrt{l}}, \dots$ - ОНС на $[a,\ a+2l]$, замкнута в $L^2_R[a, a+2l]$

$f \in L^2_R[a, a+2l] \quad f \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\frac{\pi k}{l}x + b_k \sin\frac{\pi k}{l}x)$,

где $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(t)\cos(\frac{\pi k}{l}t)dt,\ b_k = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(t)\sin(\frac{\pi k}{l}t)dt$

Задача к экзамену: Написать равенство Парсеваля для f через a_k, b_k

Теорема 14. *Если f - 2π-периодична, $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$, в точке x_0 функция удовлетворяет условию Гельдера порядка α_1 справа и α_2 слева $(\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1])$,*

тогда ТРФ функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$

Док-во: Пусть $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$

$\Rightarrow f$ удовлетворяет условию Гельдера порядка α в точке x_0 и справа, и слева.

Вспомним,что $D_n(t) \overset{def}{=} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$, $D_n(-t) = D_n(t)$

$(\hat{*}) \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}$

$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt,$

$$S_n(f,x) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+0)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0-0)D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{0}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]D_n(t)dt +$$

$$\{\text{проверьте!}\} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\left(f(x+t) - \frac{[f(x_0+0)+f(x_0-0)]}{2}\right)D_n(t)dt = I_n^1 + I_n^2 + I_n^3$$

- $\sin\frac{t}{2} \ge \frac{t}{\pi}$,[10] $t \in [0,\pi]$. Оценим ядро Дирихле: $|D_n(t)| \le \dfrac{1}{2\frac{|t|}{\pi}} = \frac{\pi}{2|t|}$, $t \in [-\pi,\pi]$

  Из условия Гельдера: $|I_1^n| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} ct^\alpha \frac{\pi}{2|t|}dt = \frac{c}{2}\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}dt = \frac{c}{2}\frac{\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$ при $\delta = \delta(\varepsilon)$

  Аналогично $|I_n^2| \le \frac{\varepsilon}{3}$ (для **всех** n , т.к. все зависящее от n, оценено 1)

- $I_n^3 \to 0$ по лемме перед принципом локализации,
  т.к. подынтегральная функция - 2π-периодична, $\in L^2_R[-\pi,\pi]$
  Значит, $\exists N(\varepsilon,\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon):\ |I_n^3| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \ge N(\varepsilon)$

Значит: $\left|S_n(f,x) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]\right| < \varepsilon$, $\forall n \ge N(\varepsilon)$ □

Билет 18

Принцип локализации Римана

Сходимость (и предел) ТРФ функции f(x) (f - 2π-периодична, f $\in L^2_R[-\pi,\pi]$) в точке x_0 зависят лишь от поведения функции f(x) в сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Док-во:

$S_n(x_0,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \mathrm{C}_n(x_0)$, $\delta \in (0,\pi)$, $\quad (\circledast)$

интеграл учитывает значения функции на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$,

$\mathrm{C}_n(x_0) \overset{x_0\in R}{\rightrightarrows} 0$ - очевидно, не играет роли □

Лемма (Уточненная Римана).

Пусть f - 2π-периодична, $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$, $\exists [a,b]:\ f_{[a,b]} \equiv 0$.

Тогда $\forall\,\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ ТРФ функции f(x) равномерно сх-ся к 0 на $[a+\delta, b-\delta]$.

Док-во: $(\circledast) \Rightarrow S_n(f,x) = \mathrm{C}_n(x) \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$ □

Следствие: Пусть f_1, f_2 - 2π-периодичны, $f_1, f_2 \in L^2_R[-\pi,\pi]$,
$f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$, ТРФ функции $f_1(x)$ сходится равномерно на [a,b].

Тогда $\forall\,\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ ТРФ функции $f_2(x)$ сходится равномерно к $f_1(x)$ на $[a+\delta, b-\delta]$.

Док-во: $S_n(f_2,x) = S_n(f_1,x) + S_n(f_2-f_1,x)$,
$S_n(f_1,x) \rightrightarrows f_1(x)$, $S_n(f_2-f_1,x) \rightrightarrows 0 \Rightarrow S_n(f_2,x) \rightrightarrows f_1(x)$ (как сумма двух равномерно сходящихся последовательностей). □

Замечание: из равномерной сходимости на $[a+\delta, b-\delta]$ $\forall\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ следует равномерная сх-сть на $\forall\,[c,d] \subset (a,b)$

Билет 19

Преобразование Фурье

Определение. $f \in L_R(\mathbb{R})$, *(иногда обозначают* $L_1(\mathbb{R})$ *) если f интегрируема по Риману на любом отрезке* $[a,b] \subset R$, *и, кроме того,* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ *сходится*

Пример: $f(x) = e^{-x^2}, f(x) \in L_R(\mathbb{R})$

Лемма. *Пусть* $f \in L_R(\mathbb{R})$.

Тогда $\forall x \in R \quad \exists \hat{f}(x) \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ixt}dt = (*)$, *причем*

a) $\hat{f}(x) \in C(R)$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \hat{f}(x) = 0$

Док-во:

- $f(t)e^{ixt}$ интегрируема по Риману на любом отрезке (как произведение интегрируемых функций), $|f(t)e^{ixt}| = |f(t)| \Rightarrow (*)$ сходится абсолютно и равномерно по x на R.

- Докажем пункт а

  $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 : \int\limits_{R\setminus[-A,A]} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**)$

  $\forall x \in R \quad \hat{f}(x+\Delta x) - \hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{it(x+\Delta x)} - e^{ixt})\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]\, dt =$

  $= \int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]\, dt + \int\limits_{R\setminus[-A,A]} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]\, dt$. Оценим оба интеграла:

- $|\int\limits_{R\setminus[-A,A]} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]dt| \le \int\limits_{R\setminus[-A,A]} \left|f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]\right|dt \le 2\int\limits_{R\setminus[-A,A]} |f(t)|dt \le \frac{2\varepsilon}{3}$

- $1-e^{iy}$ непрерывна по y $\Rightarrow \exists\delta > 0 : \forall y \in (-\delta,\delta) \quad |1-e^{iy}| < \frac{\varepsilon}{3(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt+1)}$

  $\Rightarrow \Delta x \in (-\frac{\delta}{A}, \frac{\delta}{A}) \Rightarrow t\Delta x \in (-\delta,\delta) \Rightarrow$

  $|\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]dt| \le \int\limits_{-A}^{A} |f(t)||1-e^{it\Delta x}|dt < \frac{\varepsilon}{3}\frac{\int\limits_{-A}^{A}|f(t)|dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt+1} \le \frac{\varepsilon}{3}$

)кончательно $|\hat{f}(x+\Delta x) - \hat{f}(x)| < \varepsilon$ при $\forall\Delta x \in (-\frac{\delta}{A}, \frac{\delta}{A}) \quad \forall x \in R$

- Докажем пункт b: возьмем $A > 0 : \int\limits_{R\setminus[-A,A]} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}$,

  $|\hat{f}(x)| \le |\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{itx}dt| + \int\limits_{R\setminus[-A,A]} |f(t)|dt < |\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{itx}\, dt| + \frac{\varepsilon}{3}$

  Строим ступенчатую функцию $g(t)$: $f(t) \ge g(t)$ всюду на [-A,A] , кроме конечного числа точек и условием:

  $\int\limits_{-A}^{A} f(t)dt - \int\limits_{-A}^{A} g(t)dt = \int\limits_{-A}^{A} (f(t)-g(t))dt < \int\limits_{-A}^{A} |f(t)-g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}$

  Раз f интегрируема по Риману $\Rightarrow \exists T : -A = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = A$:

  Пусть $g(t) = \begin{cases} m_k, t \in (t_{k-1}, t_k) \\ t \in \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} - \text{произвольно} \end{cases} \quad \Rightarrow \int\limits_{-A}^{A} g(t)dt = s_T(t)$

- $|\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{itx}\,dt| = |\int\limits_{-A}^{A} (f(t)-g(t))e^{itx}\,dt + \int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}\,dt| \leq$

  $\leq \int\limits_{-A}^{A} |f(t)-g(t)|\,|e^{itx}|\,dt + |\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}\,dt| < \frac{\varepsilon}{3} + |\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt|$

  $\Rightarrow |\hat{f}(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt|$

  Оценим $\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt$:

  $|\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} m_k e^{itx}dt\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \frac{e^{it_k x}-e^{it_{k-1}x}}{ix}\right| \leq \frac{1}{|x|}\sum\limits_{k=1}^{n} 2|m_k| = \frac{c}{|x|}$

  $\Rightarrow |\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt| < \frac{\varepsilon}{3}$ при достаточно больших по модулю x

  $\Rightarrow |\hat{f}(x)| < \varepsilon$ при достаточно больших $|x|$, ч.т.д.

$\square$

Следствие: Если $f \in L_R(\mathbb{R})$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos xt dt = \lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin xt dt = 0$

Док-во: $e^{ixt} = \cos xt + i\sin xt$ и применим пункт b) $\square$

Определение. *Функция $\hat{f}(x)$ называется* ***преобразованием Фурье(Фурье-образом)*** *функции $f(t)$.*

Определение. *$f(t) \in L_R(\mathbb{R})$ разложима в точке t_0 в интеграл Фурье, если существует v.p. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = \lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{+R}\hat{f}(x)e^{-it_0x}dx$*

Билет 20

Определение. *Функция $\hat{f}(x)$ называется* ***преобразованием Фурье (Фурье-образом)*** *функции $f(t)$.*

Определение. *$f(t) \in L_R(\mathbb{R})$ разложима в точке t_0 в интеграл Фурье, если существует* v.p. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = \lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{+R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx$

Теорема 18. *Если $f \in L_R(\mathbb{R})$ и в точке t_0 f удовлетворяет условию Гельдера порядка α слева и справа,*

$$\text{тогда v.p.}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{-it_0x}\,dx = \frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2} \qquad (***)$$

Вспомогательное утверждение:

$f \in L_R(\mathbb{R})$, $\forall t_0 \in R$ $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+t_0)\frac{\sin Ru}{u}\,du$

Док-во утверждения:

$\int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}e^{-it_0x}dt = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ix(t-t_0)}dt = \{u = t - t_0\} =$

$= \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+t_0)e^{ixu}du =^{12} \left\{\forall\varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) > 0 : \forall A_1, A_2 \geq A \quad \int\limits_{R\setminus[-A_1,A_2]} |f(u+t_0)|du < \frac{\varepsilon}{2R}\right\} =$

$= \underline{\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)e^{ixu}du} + \text{остаток}.$

- $|\text{остаток}| = \left|\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{R\setminus[-A_1,A_2]} f(u+t_0)e^{ixu}du\right| \leq \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{R\setminus[-A_1,A_2]} |f(u+t_0)|du <$
  $< \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varepsilon}{2R}du = \varepsilon$
- В подчеркнутом интеграле меняем порядок интегрирования:[13]
  $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)e^{ixu}du = \int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)du \int\limits_{-R}^{R} e^{ixu}dx =$

Таким образом, $\left|\int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx - 2\int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)\frac{\sin uR}{u}du\right| < \varepsilon \quad \forall A_1, A_2 \geq A(\varepsilon)$

$\Rightarrow \int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+t_0)\frac{\sin uR}{u}du$, делим на 2π и получаем утверждение ☐

Док-во теоремы: $\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin Ru}{u}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin Ru}{u}du = \{\text{инт. Дирихле, } R > 0\} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{f(t_0+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin Ru}{u} f(t_0+0)\,du$

$\frac{f(t_0-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin Ru}{u} f(t_0-0)\,du$

Условие Гельдера порядка α слева и справа в t_0 $\Rightarrow$ $\exists c > 0,\ \exists \delta_0 > 0 :$

$$\begin{cases} |f(t_0+u) - f(t_0+0)| < Cu^\alpha & u \in (0, \delta_0) \\ |f(t_0+u) - f(t_0-0)| < C|u|^\alpha & u \in (-\delta_0, 0) \end{cases}$$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 :\ 0 < \delta < \delta_0 \Rightarrow \frac{C\delta^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{5}$. В след. выкладке используем это δ :

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx - \frac{1}{2}[f(t_0+0) + f(t_0-0)] \quad = \quad \{\text{вспом. утверждение}\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+t_0)\frac{\sin Ru}{u}du - \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t_0+0)\frac{\sin Ru}{u}du \quad - \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(t_0-0)\frac{\sin Ru}{u}du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta [f(u+t_0)-f(t_0+0)]\frac{\sin Ru}{u}du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 [f(u+t_0)-f(t_0-0)]\frac{\sin Ru}{u}du +$$

$$+ \int\limits_{R\setminus[-\delta,\delta]} f(u+t_0)\frac{\sin Ru}{u} - \frac{1}{\pi}f(t_0+0)\int\limits_\delta^\infty \frac{\sin Ru}{u}du - \frac{1}{\pi}f(t_0-0)\int\limits_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Ru}{u}du = I_1+I_2+I_3-I_4-I_5$$

- $|I_1| < \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta Cu^\alpha \frac{1}{u}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta Cu^{\alpha-1}du = \frac{C\delta^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{5}$ (из выбора δ)
  $|I_2| < \frac{\varepsilon}{5}$ - аналогично $\forall R > 0$
- $I_3 : \phi(u) = \begin{cases} \frac{f(u+t_0)}{u} & |u| \geq \delta \\ 0 & |u| < \delta \end{cases}, \phi(u) \in L_R(\mathbb{R}) \Rightarrow$ по следствию основной леммы
  $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\phi(u)\sin(Ru)du = 0 \Rightarrow I_3 < \frac{\varepsilon}{5}$ для достаточно больших R
- $\int\limits_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Ru}{u}du = \int\limits_\delta^{+\infty}\frac{\sin Ru}{u}du = \{Ru = y\} = \int\limits_{\delta R}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy \xrightarrow{R\to\infty} 0,$
  $\Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty} I_4 = \lim\limits_{R\to\infty} I_5 = 0 \;\Rightarrow\; |I_4| < \frac{\varepsilon}{5}, |I_5| < \frac{\varepsilon}{5}$ для достаточно больших R

Значит, $|I_1+I_2+I_3-I_4-I_5| < \varepsilon$ для достаточно больших R $\Rightarrow (***)$:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{+R}\hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = \frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$$

$\square$